

LOAN OBJECTS
Thierry BOULASSIER

CALCUL des
ECHEANCIERS
Version 3.1

20 juillet 2008

OBJECTIF

L'objectif de ce document est de présenter des formules et résultats généraux relatifs au calcul des échéanciers.

DEFINITIONS

Définition 1

On appelle "échéancier" un couple de familles de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$, tel que :

$$\sum_{n=0}^N f_n \prod_{p=n+1}^N (1+t_p) = 0$$

... ou encore tel que :

$$\sum_{n=0}^N \frac{f_n}{\prod_{p=1}^n (1+t_p)} = 0 \quad (1)$$

La 2^{ème} équation s'obtient en divisant le membre de gauche de la 1^{ère} par $\prod_{p=1}^N (1+t_p)$.

Les *échéanciers* "terme à échoir" relèvent de cette définition, f_0 représentant alors la différence entre le "capital initial" et la 1^{ère} "échéance".

Dans la très grande majorité des applications, les nombres t_p sont tous **positifs**. Toutefois, nous n'avons pas fait cette restriction, presque tous les résultats qui suivent restent valides dans le cas contraire.

Dans les applications courantes de type "crédit", la valeur de f_0 est en général différente de celle des $(f_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$; il est donc le plus souvent plus clair de choisir 0 (plutôt que 1) comme 1^{ère} valeur de l'indice. Mais attention : dans le cas d'un *échéancier* "terme à échoir", dans la communication juridique ou commerciale on appelle évidemment "2^{ème} échéance" ce que nous appelons f_1 .

Le choix de la définition (1) implique que, quand les nombres t_p sont tous positifs, les nombres f_n ne peuvent être tous positifs ni tous négatifs. Ainsi, par exemple, dans les applications courantes de type "crédit", le signe de f_0 est en général opposé à celui des $(f_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$. D'autres définitions peuvent être proposées, qui supposent les f_n tous de même signe, mais de telles définitions sont toujours plus compliquées et ne peuvent décrire que des cas très particuliers. Les formules présentées dans la suite du document **différeront donc le plus souvent de celles qui s'appliquent quand on suppose que tous les f_n sont de même signe.**

Par contre, si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un *échéancier*, alors $(-f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est aussi un *échéancier*. Donc, en général, une même opération financière représentée par un *échéancier* $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ pourra également être représentée par l'*échéancier* $(-f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$. Ainsi, une opération de type "crédit" pourra être représentée :

- soit par un *échéancier* ayant $f_0 > 0$ et les $(f_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}} < 0$
- soit par un *échéancier* ayant $f_0 < 0$ et les $(f_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}} > 0$

Vocabulaire

f_n est dit "flux de rang n " ou "flux n "

Malgré ce nom, chacun de ces *flux n* peut être éventuellement nul.

Avec nos notations, les *flux n* sont donc au nombre de $N + 1$.

t_n est dit "taux d'intérêt de la période n "

Définition alternative

On appelle "échancier" un couple de familles de nombres $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n = \{1, 2 \dots N\}}$, tel qu'il existe une autre famille de nombres $(S_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$, telle que :

- $S_0 = f_0$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $S_n = (1 + t_n) S_{n-1} + f_n$ (2)
- $S_N = 0$

Cette définition est équivalente à la définition 1 ; cette équivalence se vérifie en posant :

- $S_0 = f_0$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $S_n = \sum_{p=0}^n f_p \prod_{q=p+1}^n (1 + t_q)$

Remarque : une dernière "définition alternative" est aussi possible par les "soldes **avant** flux n ", c'est-à-dire avec l'algorithme :

- $S_0 = 0$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $S_n = (1 + t_n) (S_{n-1} + f_n)$
- $S_N = f_N$

Toutefois, cette présentation est moins utile que la précédente, puisque seuls les "soldes **après** flux n " vérifient les résultats présentés dans le chapitre "Actualisation".

Vocabulaire

S_n est dit "solde après flux n "

Attention : Les f_n sont donc positifs s'ils augmentent S_n .

$t_n S_{n-1}$ est dit "intérêts constatés en période n "

Ces *intérêts constatés en période n* ne doivent pas être confondus avec les *intérêts du flux n* (expression qui signifie "intérêts contenus dans le flux n "), qui seront définis plus loin.

Dans le cas "courant" où les t_n sont tous positifs, les *intérêts constatés en période n* ont donc **même signe** que le *solde après flux n* . Dans une application de type "crédit" par exemple, ils auront donc le même signe que le flux initial f_0 .

On introduira également plus loin la décomposition de S_n en "capital" et "intérêts capitalisés". Les définitions ci-dessus présentent l'intérêt de mettre en évidence que les notions de "capital" et "intérêts capitalisés" ne sont pas essentielles.

Interprétation temporelle

Dans toutes les applications pratiques :

- Chaque f_n est le montant d'un flux monétaire.
- Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, on appelle "période n " l'intervalle du temps qui s'écoule entre le flux monétaire de montant f_{n-1} et le flux monétaire de montant f_n .

Ces périodes peuvent être de **durées inégales**.

- On se place du point de vue **d'une des parties** à ces échanges monétaires, et le signe de f_n est négatif si la partie émet ce flux, positif si elle le reçoit.

Toutefois, cette interprétation n'est pas nécessaire pour déduire les résultats qui suivent.

Cas dégradés

Taux d'intérêt constant

C'est le cas où tous les $(t_n)_{n = \{1, 2 \dots N\}}$ prennent la même valeur t .

La formule (1) se réduit alors à :

$$\sum_{n=0}^N \frac{f_n}{(1+t)^n} = 0 \quad (1 \text{ bis})$$

Interprétation temporelle

Dans l'interprétation temporelle présentée plus haut, les "périodes" sont alors toujours de durées égales (au moins approximativement).

Critère assurant qu'une "famille de flux" est un échéancier

Dans ce cas particulier (taux d'intérêt constant), la question suivante se pose : Pour une famille de nombres $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$ donnée, à quelle condition existe-t-il un nombre t tel que $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$, t soit un *échéancier* ?

Autrement dit, à quelle condition (portant sur la famille de nombres $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$) l'équation (1 bis) ci-dessus admet-elle une solution positive en t ?

Le résultat suivant résout partiellement la question en garantissant l'existence d'une solution dans les cas usuels :

Soit une famille de nombres $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$. Si f_0 et $\sum_{n=0}^N f_n$ sont de signes contraires, alors

l'équation (1 bis) admet **au moins** une solution en t ; autrement dit, il existe un nombre t positif, tel que $(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$, t soit un *échéancier*.

Démonstration :

Soit F la fonction qui à t associe : $\sum_{n=0}^N \frac{f_n}{(1+t)^n}$

Alors :

- $F(0) = \sum_{n=0}^N f_n$
- F tend vers f_0 quand t tend vers $+\infty$
- F est une fonction continue

Donc il existe un nombre $t > 0$ tel que $F(t) = 0$

Cas où tous les flux "intermédiaires" sont nuls

C'est le cas où tous les f_n autres que f_0 et f_N sont nuls.

La formule (1) se réduit alors à :

$$-\frac{f_N}{f_0} = \prod_{n=1}^N (1+t_n)$$

Cas où le taux d'intérêt est constant et tous les flux "intermédiaires" sont nuls

C'est le cas où tous les $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ prennent la même valeur t , et où tous les f_n autres que f_0 et f_N sont nuls.

La formule (1) se réduit alors à :

$$-\frac{f_N}{f_0} = (1+t)^N$$

RESULTATS GENERAUX

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, *solde après flux n* $= \sum_{p=0}^n f_p \prod_{q=p+1}^n (1+t_q)$

Dans le cas où tous les $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ prennent la même valeur t :

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, *solde après flux n* $= \sum_{p=0}^n f_p (1+t)^{n-p}$

Intérêts constatés

L'intérêt de la présentation qui suit est qu'elle ne fait pas appel aux notions de "capital dû" et d'"intérêts capitalisés".

Formule générale

Si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un échancier :

Pour tous p, q appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, tels que $q > p$: $S_q = S_p + \sum_{p+1}^q ic_n + \sum_{p+1}^q f_n$

où ic_n désigne les *intérêts constatés en période n* .

Démonstration : par récurrence sur q :

1. Pour $q = 1$: $S_{p+1} = S_p + ic_{p+1} + f_{p+1}$ d'après (2)
2. Supposons que la formule soit vraie pour p et q , c'est-à-dire que :

$$S_q = S_p + \sum_{p+1}^q ic_n + \sum_{p+1}^q f_n$$

Alors :

$$\begin{aligned} S_{q+1} &= S_q + ic_{q+1} + f_{q+1} \text{ d'après (2)} \\ &= S_p + \sum_{p+1}^q ic_n + \sum_{p+1}^q f_n + ic_{q+1} + f_{q+1} \text{ d'après l'hypothèse} \\ &= S_p + \sum_{p+1}^{q+1} ic_n + \sum_{p+1}^{q+1} f_n \end{aligned}$$

Conséquence 1

Si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un échancier :

$$\text{Pour tout } q \text{ appartenant à } \{1, 2 \dots N\} : S_q = \sum_1^q ic_n + \sum_0^q f_n$$

où ic_n désigne les *intérêts constatés en période n*.

Démonstration : en appliquant la "formule générale" avec $p = 0$.

Conséquence 2

Si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un échancier :

$$\sum_1^N ic_n = - \sum_0^N f_n$$

où ic_n désigne les *intérêts constatés en période n*.

Démonstration : en appliquant la "formule générale" avec $p = 0$ et $q = N$.

Conséquence 3

Si deux échanciers ont même somme des *flux n*, ils ont même somme des *intérêts constatés en période n* (mais en général, les taux d'intérêt différeront !)

Application aux "étalements" de différences de flux par la méthode du Taux de Rendement Interne

Problématique

On suppose donnés 2 échanciers et on cherche une façon rationnelle de re-ventiler (ou d'"étalement") dans le temps les "différences de flux" entre ces deux échanciers.

Exemple de l'étalement d'une "commission d'apport" selon les normes comptables IAS

Dans cet exemple, $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est l'échancier d'une opération avec la clientèle, d est le montant d'un flux de "commission d'apport" constaté en même temps que le flux f_0 , $(f'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t'_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est le nouvel échancier obtenu ainsi :

- $f'_0 = f_0 + d$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $f'_n = f_n$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $t'_n =$ taux de rendement interne des flux f'_n (donc tous les t'_n sont égaux)

Les "différences de flux" (entre les deux échanciers) se réduisent donc au flux unique de montant d à l'instant 0 ; par conséquent, le problème se ramène à celui de l'étalement d'un flux unique initial.

Etalement des différences de flux

Si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ et $(f'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ sont des échanciers, et si on appelle "étalement des différences de flux" la famille de nombres $(e_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ définie par :

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$: $e_n = ic'_n - ic_n$

où ic_n et ic'_n désignent respectivement les *intérêts constatés en période n* du 1^{er} et du 2^{ème} échancier,

$$\dots \text{ alors } \sum_{n=1}^N e_n = - \sum_{n=0}^N (f'_n - f_n)$$

Autrement dit, la somme des "étalements" est bien égale (en valeur absolue) à la somme des "différences de flux" à étaler ; la famille $(e_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$ constitue donc bien une façon "d'étaler" les "différences de flux".

Démonstration : découle immédiatement de la "conséquence 2" ci-dessus.

Reste à étaler des différences de flux

Avec les mêmes hypothèses, si on appelle "reste à étaler des différences de flux" la famille de nombres $(r_n)_{n = \{1, 2 \dots N\}}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n \text{ appartenant à } \{1, 2 \dots N\}, r_n = \sum_{p=0}^n (f'_p - f_p) + \sum_{p=1}^n e_p$$

... alors pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$: $r_n = S'_n - S_n$

où S_n et S'_n désignent respectivement les *solde après flux* n du 1^{er} et du 2^{ème} échéancier.

Autrement dit, le "reste à étaler" est égal à la différence entre les *solde après flux* n des deux échéanciers.

Démonstration : découle immédiatement de la "conséquence 1" ci-dessus.

Part de "capital" et part "d'intérêts" des soldes.

Comme on l'a annoncé plus haut, les notions qui suivent ne sont pas indispensables pour déduire les propriétés générales des "échéanciers". Toutefois, ces notions :

- Peuvent avoir un sens juridique
- Figurent souvent traditionnellement dans la communication entre les parties
- Restent indispensables pour définir certains échéanciers (par exemple, l'échéancier à amortissement du capital constant)

Définition

$(f_n)_{n = \{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n = \{1, 2 \dots N\}}$ étant un *échéancier*, on appelle :

k_n "capital du flux n " (ou "amortissement n ")

i_n "intérêts du flux n "

K_n "capital dû après flux n "

I_n "intérêts dus après flux n "

... les quantités définies ainsi :

$$K_0 = f_0$$

$$I_0 = 0$$

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$:

$$I_n = I_{n-1} + \text{intérêts constatés en période } n$$

- si f_n est de signe opposé à I_n :
 - si $|f_n| > |I_n|$: $i_n = -I_n$
 - autrement : $i_n = f_n$
- autrement (donc si f_n est de même signe que I_n) : $i_n = 0$

$$k_n = f_n - i_n$$

$$I_n = I_{n-1} + i_n$$

$$K_n = K_{n-1} + k_n$$

Attention :

- Avec nos conventions, i_n et k_n ont même signe que f_n
- Dans les cas les plus courants, i_n (*intérêts du flux n*) sera égal (en valeur absolue) à ic_n (*intérêts constatés en période n*) ; mais ce n'est pas toujours vrai : i_n peut être supérieur à ic_n (dans le cas où l'échéance n'est pas assez élevée pour payer les intérêts constatés) ou au contraire supérieur (dans le cas du "rattrapage" après une période où l'échéance n'était pas assez élevée pour payer les intérêts constatés)
- Les I_n (*intérêts dus après flux n*) sont donc par définition des intérêts **capitalisés**. Le cas des intérêts **non** capitalisés est abordé dans un chapitre spécifique.

Propriétés

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$:

$$f_n = i_n + k_n$$

$$S_n = I_n + K_n$$

Opérations sur les "échéanciers"

Multiplication d'un échéancier par un nombre

si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un échéancier, α un nombre réel, alors :

$$(\alpha f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}, (t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$$

... est **encore** un échéancier, et de plus (ce qui est moins évident) :

$$\text{intérêts du flux } n = \alpha i_n$$

$$\text{capital du flux } n = \alpha k_n$$

$$\text{intérêts dus après flux } n = \alpha I_n$$

$$\text{capital dû après flux } n = \alpha K_n$$

Application : "remboursement anticipé" avec impact sur les échéances pour un échéancier qui a des paliers à "amortissement du capital constant" : les nouvelles valeurs des "amortissements du capital" des paliers seront **proportionnelles** aux anciennes.

Addition de deux échéanciers de mêmes taux d'intérêt

si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ et $(f'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ sont des échéanciers, alors :

$$(f_n + f'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}, (t_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$$

... est encore un échéancier.

Si, de plus, chacun de ces échéanciers est tel que :

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$:

- f_n et *intérêts constatés en période n* sont de signes opposés
- $|f_n| > |\text{intérêts constatés en période } n|$

(Ce qui est le cas courant de l'échéancier de crédit)

... alors :

$$\text{intérêts du flux } n = i_n + i'_n$$

$$\text{capital du flux } n = k_n + k'_n$$

$$\text{intérêts dus après flux } n = I_n + I'_n$$

$$\text{capital dû après flux } n = K_n + K'_n$$

Par contre, attention : si on additionne un échancier qui présente des **intérêts capitalisés** à un échancier **sans** intérêts capitalisés, dans l'échancier ainsi obtenu les *intérêts du flux n* ne seront pas en général égaux à la somme des *intérêts du flux n* des échanciers.

Actualisation

Dans ce chapitre, on suppose donnée une famille de nombres $T = (t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$, dite "taux d'actualisation". Donc, cette présentation est un peu plus générale que la présentation faite d'ordinaire, dans laquelle on ne considère qu'un taux d'intérêt unique.

Taux d'actualisation

Etant donnés une famille de "taux d'actualisation" $T = (t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$ et 2 indices (q, r) appartenant à $\{0, 1, \dots, N\}$, on appelle "coefficient d'actualisation, aux taux T , de l'instant q à l'instant r " le nombre :

$$\begin{aligned} ta_{T,q}^r &= \prod_{p=q+1}^r (1+t_p) && \text{si } r \geq q \\ &= 1 / \prod_{p=r+1}^q (1+t_p) && \text{autrement} \end{aligned}$$

Cas particulier : taux d'intérêt constant

On rappelle que c'est le cas où tous les $(t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$ prennent la même valeur t .

Dans ce cas :

$$ta_{t,q}^r = (1+t)^{r-q}$$

Valeur actualisée : définition 1

Etant donnés une famille de "taux d'actualisation" $T = (t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$, 2 indices (q, r) appartenant à $\{0, 1, \dots, N\}$, et a un nombre, on appelle "valeur actualisée de a , aux taux T , du rang q au rang r " :

$$VA_{T,q}^r(a) = a * ta_{T,q}^r$$

Valeur actualisée : définition alternative utilisant la notion d'échancier

Etant donné une famille de "taux d'actualisation" $T = (t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$, 2 indices (q, r) appartenant à $\{0, 1, \dots, N\}$, et a un nombre, on appelle "valeur actualisée de a , aux taux T , du rang q au rang r ", la valeur x telle que, si :

- $f_q = a$
- $f_r = -x$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2, \dots, N\}$ et différent de q et r : $f_n = 0$

... alors $(f_n)_{n=\{0,1, \dots, N\}}$, $(t_n)_{n=\{0,1, \dots, N\}}$ est un *échancier*.

Cette définition est équivalente à la définition 1 ; en effet :

$(f_n)_{n=\{0,1, \dots, N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2, \dots, N\}}$ est un *échancier*

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N f_n \prod_{p=n+1}^N (1+t_p) = 0 \quad \text{d'après la définition d'un échancier}$$

$$\Leftrightarrow x \prod_{p=r+1}^N (1+t_p) - a \prod_{p=q+1}^N (1+t_p) = 0 \quad \text{d'après la définition ci-dessus des } (f_n)$$

$$\Leftrightarrow x = a \prod_{p=q+1}^r (1+t_p) \text{ si } r > q$$

Rapport entre valeurs actualisées et soldes après le flux n

Si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $T = (t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est un *échancier* :

Pour tout nombre entier r appartenant à $\{0, 1, \dots N\}$:

$$\text{solde après flux } r = \sum_{n=0}^N VA_{T,n}^r(f_n)$$

En particulier :

- $\sum_{n=0}^N VA_{T,n}^0(f_n) = f_0$
- $\sum_{n=0}^N VA_{T,n}^N(f_n) = 0$

... puisque, par définition d'un *échancier* :

- *solde après flux 0* = f_0
- *solde après flux N* = 0

"Règle d'or"

Etant donné un *échancier* $(f_n)_{n=\{0, 2 \dots N\}}$, $T = (t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$, 2 indices (q, r) appartenant à $\{0, 1, \dots N\}$, a un nombre quelconque, et la famille de nombres $(f'_n)_{n=\{0, 2 \dots N\}}$ définie ainsi:

- $f'_q = f_q + a$
- $f'_r = f_r - VA_{T,q}^r(a)$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2, \dots N\}$ et différent de q et r : $f'_n = f_n$

... alors $(f'_n)_{n=\{0, 2 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$, est encore un *échancier*.

La démonstration découle immédiatement du chapitre "addition de deux échanciers de même taux d'intérêt" et de la "définition alternative par la notion d'échancier".

Application

Etant donné une famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, un "taux d'intérêt" t , un rang r appartenant à $\{1, 2, \dots N\}$, et la nouvelle famille de nombres $(f'_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ ainsi définie :

- $f'_r = f_r - \sum_{n=0}^N VA_{t,n}^r(f_n)$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2, \dots N\}$ et différent de r : $f'_n = f_n$

... alors $(f'_n)_{n=\{0, 2 \dots N\}}$, t est un *échancier*.

La démonstration découle immédiatement, d'une part, du fait que la famille de flux nuls est un *échancier*, et, d'autre part, de la "Règle d'or".

Par conséquent, pour une famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, un "taux d'intérêt" t et un rang r appartenant à $\{1, 2, \dots N\}$ donnés, on pourra appeler *intérêts constatés de la période n au taux t*, les *intérêts constatés de la période n* de l'échancier constitué ainsi :

- $f'_r = f_r - \sum_{n=0}^N VA_{t,n}^r(f_n)$
- pour tout n appartenant à $\{1, 2, \dots N\}$ et différent de r : $f'_n = f_n$

Et alors :

somme des *intérêts constatés de la période n au taux t*

$$= \sum_{n=0}^N f_n - \sum_{n=0}^N VA_{t,n}^r(f_n)$$

ECHEANCIERS A PALIERS

Ce chapitre traite de tous les cas particuliers usuels d'échéanciers pouvant être définis par un nombre réduit de paramètres.

Palier

Une famille de nombres $(f_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$, est dite "palier" de "taux de progressivité" r si et seulement si, pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$: $f_n = f_1 * (1 + r)^{n-1}$

Les nombres f_n sont alors dits "échéances" du *palier*. En particulier, f_1 est l'*échéance* initiale du *palier*.

N est appelé "nombre de périodes" du *palier*.

Un *palier* à *taux de progressivité* nul a donc des *échéances* constantes, et donc toutes égales à f_1 .

Un *palier* à *taux de progressivité* strictement positif est dit "à échéances progressives".

Un *palier* à *taux de progressivité* strictement négatif est dit "à échéances dégressives".

Cas d'un échéancier "à paliers en terme échu"

Définition

Un *échéancier* $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ est dit "à paliers en terme échu" si et seulement si :

- Les nombres $f_1, f_2, \dots, f_N - V_F$ constituent une succession de J *paliers*.
- t_n est constant quand n parcourt chacun de ces *palier*. Cette constante est appelée *taux d'intérêt* du *palier*.

Notations

- f_0 est noté V_I
- Le *nombre de périodes* du *palier j* est noté N_j .

On a donc : $\sum_j N_j = N = \text{nombre de flux} - 1$

- Le *taux d'intérêt* du *palier j* est noté t_j .
- Le *taux de progressivité* du *palier j* est noté r_j

Les notations V_I et V_F peuvent être lues comme des abréviations de "Valeur Initiale" et "Valeur Finale". Il serait en effet maladroit de parler de "capital" au lieu de "valeur" car, dans ce modèle, V_I et V_F peuvent inclure une part d'intérêts (c'est même toujours le cas pour V_F si l'échéancier est en "terme à échoir"). De plus, l'expression "Valeur Finale" rappelle l'expression "Valeur résiduelle", qui est l'appellation constamment donnée à V_F dans les métiers du leasing.

On garde les mêmes conventions de signe que jusqu'ici. Donc :

- dans les applications courantes de type "crédit", V_I est de signe opposé aux a_j et à V_F .
- dans les applications courantes de type "épargne", V_F est de signe opposé aux a_j et à V_I .

Relation entre les paramètres

L'équation suivante détermine la valeur de l'un quelconque des paramètres $a_j, N_j, t_j, r_j, V_I, V_F$ (soit $4J + 2$ paramètres en tout) en fonction des $4J + 1$ autres paramètres :

$$\sum_j (a_j \rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k^{N_k}) + V_I \prod_j x_j^{N_j} + V_F = 0 \quad (3)$$

où :

$$x_j = 1 + t_j$$

$$y_j = 1 + r_j$$

$$\rho_j = \frac{x_j^{N_j} - y_j^{N_j}}{t_j - r_j} \quad \text{si } t_j \neq r_j$$

$$N_j (1 + t_j)^{N_j - 1} \quad \text{autrement}$$

Toutefois, dans le cas général, on ne disposera d'une formule explicite exprimant cette valeur que pour les paramètres a_j, V_I, V_F ; la valeur des autres paramètres (soient N_j, t_j, r_j) ne pourra être obtenue que par des méthodes de calcul numérique.

Application

Si un *échancier* a une "valeur finale" V_F , on obtient un *échancier* de **même** "valeur initiale" et de "valeur finale" V'_F en multipliant chaque *échéance* a_j par :

$$1 + (V_F - V'_F) / \sum_j (a_j \frac{x_j^{N_j} - y_j^{N_j}}{t_j - r_j} \prod_{k \geq j+1} x_k^{N_k}) \quad (4)$$

Cette règle est couramment utilisée pour recalculer un *échancier* à "valeur finale" non nulle quand on "révise" son *taux d'intérêt* avec "impact sur les échéances" (dans ce cas d'ailleurs, tous les t_j sont égaux) :

1. dans un 1^{er} temps, on recalcule V_F par la formule (3) en ne changeant que le *taux d'intérêt*.
2. dans un 2^{ème} temps, on recalcule les *échéances* par la formule (4) pour obtenir une valeur finale V'_F égale à la V_F avant changement du *taux d'intérêt*.

Cas d'un échancier "à paliers en terme à échoir"

Définition

Un *échancier* $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1,2 \dots N\}}$ est dit "à paliers en terme à échoir" si et seulement si :

- Les nombres $f_0 - V_I, f_2, \dots, f_{N-1}$ constituent une succession de J *paliers*.
- t_{n+1} est constant quand n parcourt chacun de ces *palier*. Cette constante est appelée *taux d'intérêt* du *palier*.

Notations

- f_N est noté V_F
- Les autres notations sont identiques au cas précédent.

Relation entre les paramètres

Elle est obtenue en remplaçant, dans la formule (3), chaque ρ_j par $\rho_j (1 + t_j)$

Ce résultat se démontre par application de la "règle d'or", en remplaçant chaque *échéance* par sa valeur actualisée au rang précédent.

A noter que dans ce cas :

- V_F ne peut être nul que si $S_{N-1} = 0$ (c'est-à-dire, si la dernière *échéance* épuise la dette)
- Dans l'autre cas, V_F comprendra toujours une part d'intérêts si t_j est non nul.

Cas particulier : paliers à échéance constante

Autrement dit, c'est le cas où, pour tout j , $r_j = 0$.

La relation entre les paramètres devient :

$$\sum_j (a_j \rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k) + V_I \prod_j x_j + V_F = 0$$

où :

$$x_j = (1 + t_j)^{N_j}$$

$$\rho_j = \frac{x_j - 1}{t_j} \quad \text{si } t_j \neq 0$$

$$N_j \quad \text{autrement}$$

Sous-cas particulier : paliers à échéance constante et de même taux d'intérêt

Attention : en général, cela impliquera que les "périodes" des différents *paliers* soient de **durées égales**.

La valeur de *taux d'intérêt* commune est notée t .

La relation entre les paramètres devient :

$$\frac{1}{t} \sum_j (a_j (x^{N_j} - 1) x^{\sum_{k \geq j+1} N_k}) + V_I x^{\sum_j N_j} + V_F = 0$$

$$\text{où } x = 1 + t$$

Dans le cas d'un *échéancier* en "terme à échoir", la formule est obtenue en multipliant par $1 + t$ le 1^{er} terme de la somme précédente.

Sous-cas particulier : "lissage" d'un ensemble d'échéanciers

Ce problème consiste à rechercher les échéanciers, qui, additionnés à un autre échéancier d'échéances b_j , produiront une valeur d'échéance constante. L'expression "lissage" est empruntée au vocabulaire du crédit immobilier.

Les paramètres qui définissent ces échéanciers sont désormais : c (valeur de l'échéance constante obtenue ; au lieu de a_j), N_j , t_j , r_j , V_I , V_F

La relation entre les paramètres devient :

$$\sum_j ((c - b_j) \rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k) + V_I \prod_j x_j + V_F = 0$$

soit encore :

$$c \sum_j (\rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k) - \sum_j (b_j \rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k) + V_I \prod_j x_j + V_F = 0$$

où :

$$x_j = (1 + t_j)^{N_j}$$

$$\rho_j = \frac{x_j - 1}{t_j} \quad \text{si } t_j \neq 0$$

$$N_j \quad \text{autrement}$$

Cas particulier : paliers de même échéance initiale

Ce cas ne présente d'intérêt pratique que si **chacun** des paliers est à échéance constante, et alors l'échéance est évidemment constante à travers tous les paliers (cas qui peut d'ailleurs être aussi considéré comme un cas particulier du "lissage"). Toutefois, cette hypothèse n'est pas nécessaire pour établir la formule qui suit.

La valeur d'échéance initiale commune est notée a .

La relation entre les paramètres devient :

$$a \sum_j (\rho_j \prod_{k \geq j+1} x_k) + V_I \prod_j x_j + V_F = 0$$

où :

$$x_j = (1 + t_j)^{N_j}$$

$$\rho_j = \frac{x_j - 1}{t_j} \quad \text{si } t_j \neq 0$$

$$N_j \quad \text{autrement}$$

Cas particulier : un palier unique

Dans ce chapitre, on considère le cas $J = 1$, c'est-à-dire le cas d'un *échéancier* à *palier* unique, de nombre de périodes N , *échéance* a , *taux d'intérêt* t et *taux de progressivité* r .

Ce cas peut aussi être considéré comme un sous-cas particulier de chacun des deux "sous-cas particuliers" précédents.

Exemples d'applications :

- location avec option d'achat.
- épargne à versements programmés et 1^{er} versement exceptionnel.

Relation entre les paramètres

Elle devient :

$$a \rho + V_I (1+t)^N + V_F = 0$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} \quad \text{si } t \neq r$$

$$N (1+t)^{N-1} \quad \text{autrement}$$

d'où :

$a = - \frac{V_I (1+t)^N + V_F}{\rho} \quad (5)$ $V_I = - (1+t)^{-N} (a \rho + V_F)$ $V_F = - (a \rho + V_I (1+t)^N)$ $\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} \quad \text{si } t \neq r$ $N (1+t)^{N-1} \quad \text{autrement}$
--

Dans le cas général, il n'existe pas de formule algébrique exprimant t , r ou N en fonction des autres paramètres.

Pour un *échancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a (1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{0, 1 \dots N-1\}$ (attention donc : les formules ne sont plus vraies pour *solde après flux N !*) :

- Pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^n - (1+r)^n}{t-r} + V_I (1+t)^n$$

Mais attention : dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang $n-1$ dans le *palier*.

- Pour un *échancier* "terme à échoir" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^{n+1} - (1+r)^{n+1}}{t-r} + V_I (1+t)^n$$

Dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang n dans le *palier*.

Somme des échéances

Elle vaut :

$$a \frac{(1+r)^N - 1}{r} \quad \text{si } r \neq 0$$

$$a N \quad \text{autrement}$$

Somme des intérêts

Elle vaut (avec les conventions de signe habituelles) :

$$\begin{aligned}
 & - (V_F + V_I + \text{somme des échéances}) \\
 & = \\
 & - (V_F + V_I + a \frac{(1+r)^N - 1}{r}) \quad \text{si } r \neq 0 \\
 & - (V_F + V_I + a N) \quad \text{autrement}
 \end{aligned}$$

Impact des "arrondis"

Si on calcule a en fonction de V_F , V_I , t , r , N avec la formule (5) ci-dessous, alors le tableau calculé par l'algorithme (2), mais en en arrondissant les **intérêts** au centime le plus proche à chaque échéance, ne sera pas tout à fait exact (c'est-à-dire que la somme des amortissements en capital ne sera pas égale au capital emprunté), a fortiori si on arrondit, **en plus**, a "au cent le plus proche".

Par contre, le résultat suivant relativise l'effet des "arrondis" dans l'utilisation de la formule (5) :

Soient :

- t , r , N , a , V_F , V_I les paramètres d'un *échancier* à palier unique, dans lesquels on suppose que **a est une valeur imposée "ronde"** (c'est-à-dire multiple d'une unité monétaire q)
- V'_I la valeur de V_I arrondie "au multiple de q le plus proche".
- a' obtenu en fonction de (t, r, N, V_F, V'_I) par la formule (5).

...alors la valeur de a' arrondie "au multiple de q le plus proche" est **égale à a** .

Autrement dit, **un programme recalculant la valeur de a par la formule (5) en fonction de (t, r, n, V_F, V'_I) , puis arrondissant la valeur trouvée, trouvera bien la valeur a** .

Cette propriété est couramment utilisée par les applications informatiques financières quand elles calculent des échanciers présentés auparavant aux clients sous forme "arrondie".

Sous cas particulier : V_F (valeur finale) nulle

Dans ce cas, la "valeur initiale" V_I peut alors être notée plus simplement V .

Exemple : crédit à mensualités progressives.

Relation entre les paramètres

Elle devient :

$$\begin{aligned}
 & a \rho + V(1+t)^N = 0 \\
 \text{où } \rho = & \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} \quad \text{si } t \neq r \\
 & N(1+t)^{N-1} \quad \text{autrement}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\log(1+V(t-r)/a)}{\log(\frac{1+r}{1+t})} && \text{si } t-r < -\frac{a}{V} \text{ et } \neq 0 \\
 &- \frac{V(1+t)}{a} && \text{si } t=r \\
 a &= - \frac{V(1+t)^N}{\rho} && (5) \\
 V &= - (1+t)^{-N} a \rho \\
 \text{où } \rho &= \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} && \text{si } t \neq r \\
 &N (1+t)^{N-1} && \text{autrement}
 \end{aligned}$$

Dans tous les cas usuels, t et r sont tous deux supérieurs à -1 et donc ρ est un nombre positif. Par conséquent, a et V seront nécessairement de signes algébriques **opposés**.

A la différence du cas général, il existe donc maintenant une formule exprimant N en fonction des autres paramètres.

Pour un *échancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a(1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{0, 1, 2 \dots N\}$ (attention donc : dans ce cas particulier l'expression du *Solde après flux n* reste valable jusqu'au rang N) :

- Pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^n - (1+r)^n}{t-r} + V(1+t)^n$$

Mais attention : dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang $n-1$ dans le *palier*.

- Pour un *échancier* "terme à échoir" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^{n+1} - (1+r)^{n+1}}{t-r} + V(1+t)^n$$

Dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang n dans le *palier*.

A t, r fixes, a , *solde après flux n* et *intérêts constatés en période n* sont donc proportionnels à V .

Sous-cas particulier : V_I (valeur initiale) nulle

Autrement dit, moyennant un changement d'origine, les flux sont constants dès l'origine.

Exemple : épargne à mensualités programmées dégressives.

La "valeur finale" V_F peut alors être notée plus simplement V .

Relation entre les paramètres

Elle devient :

$$a \rho + V = 0$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} \quad \text{si } t \neq r$$

$$N(1+t)^{N-1} \quad \text{autrement}$$

d'où :

$a = -\frac{V}{\rho}$ $V = -a \rho$ $\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - (1+r)^N}{t-r} \quad \text{si } t \neq r$ $N(1+t)^{N-1} \quad \text{autrement}$

Ici encore, dans tous les cas usuels, t et r sont tous deux supérieurs à -1 et donc ρ est un nombre positif. Par conséquent, a et V seront nécessairement de signes algébriques **opposés**.

Pour un *échancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a(1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{0, 2 \dots N-1\}$ (attention donc : les formules ne sont plus vraies pour *Solde après flux N* !) :

- Pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^n - (1+r)^n}{t-r}$$

Mais attention : dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang $n-1$ dans le *palier*.

- Pour un *échancier* "terme à échoir" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^{n+1} - (1+r)^{n+1}}{t-r}$$

Dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang n dans le *palier*.

Ici encore, à t, r fixes, a , *solde après flux n* et *intérêts constatés en période n* sont donc proportionnels à V .

Sous-cas particulier : Palier à échéance constante

Exemples d'applications :

- emprunt à décaissement unique et remboursements constants.
- épargne à versements programmés constants et 1^{er} versement exceptionnel.

Relation entre les paramètres

Elle devient :

$$a \rho + V_I (1+t)^N + V_F = 0$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$$

$$N \quad \text{autrement}$$

d'où :

$$N = \frac{\log\left(\frac{a - t V_F}{a + t V_I}\right)}{\log(1+t)} \quad \text{si } t > 0 \text{ et } \frac{a - t V_F}{a + t V_I} \geq 1 \quad (6)$$

$$- \frac{V_I + V_F}{a} \quad \text{si } t = 0 \text{ et } \frac{V_I + V_F}{a} \leq 0$$

$$a = - \frac{V_I (1+t)^N + V_F}{\rho} \quad (7)$$

$$V_I = - (1+t)^{-N} (a \rho + V_F)$$

$$V_F = - (a \rho + V_I (1+t)^N)$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$$

$$N \quad \text{autrement}$$

Il n'existe pas de formule algébrique permettant de déduire t de a et N . A l'inverse, comme dans le cas particulier " $V_F = 0$ ", on dispose ici également d'une formule explicite pour obtenir la valeur de N .

Pour un *échancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a (1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{0, 1 \dots N-1\}$ (attention : les formules ne sont donc plus vraies pour *solde après flux N* !) :

- Pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} + V_I (1+t)^n$$

Mais attention : dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang $n-1$ dans le *palier*.

- Pour un *échancier* "terme à échoir" :

$$\text{Solde après flux } n = a \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} + V_I (1+t)^n$$

Dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang n dans le *palier*.

Cas de la "dernière échéance brisée"

La formule (6) est assez délicate à utiliser car elle donne en général un résultat qui n'est pas un nombre entier, alors que le nombre N (nombre de *périodes* de l'*échancier*) ne peut être par définition qu'un nombre entier.

Quand la solution de l'équation (6) n'est **pas** un nombre entier, on obtient toutefois un *échancier* en prenant :

- Un nombre de *périodes* égal à (partie entière(N) + 1)
- Une dernière *échéance* de montant inférieur à a .

Expression approchée de a

Au voisinage de $t = 0$:

$$a \approx \frac{V_I + V_F}{N} + t \cdot \frac{V_I - V_F + (V_I + V_F)/N}{2}$$

- Le 1^{er} terme représente évidemment la moyenne des parts en **capital** des échéances.
- Le 2^{ème} terme, qui représente donc la moyenne des parts en **intérêts** des échéances, est approximativement égal à $\frac{V_I - V_F}{2}$.

Somme des intérêts

Elle vaut (avec les conventions de signe habituelles) :

$$- (V_F + V_I + N a)$$

$$= (\text{en éliminant } a :) \frac{N t}{(1+t)^N - 1} ((1+t)^N V_I + V_F) - V_I - V_F$$

Sous-cas particulier : V_I (valeur initiale) et a (échéance) sont de signes contraires

Exemple : emprunt à remboursements constants.

La valeur du *capital du flux* n (ou "amortissement" n) vaut :

$$(1+t)^{n-1} (t V_I + a)$$

Donc ces "amortissements" sont en "progression géométrique", d'où l'expression, utilisée par les actuaires, d'échéancier à "amortissement géométrique".

Sous cas particulier : V_F (valeur finale) nulle

Comme plus haut, la "valeur initiale" V_I peut alors être notée plus simplement V .

Exemple : crédit "classique".

Relation entre paramètres

Elle devient :

$$a \rho + V (1+t)^N = 0$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$$

$$N \quad \text{autrement}$$

d'où :

$N = - \frac{\log(1+t V / a)}{\log(1+t)} \quad \text{si } t > 0$ $- \frac{V}{a} \quad \text{si } t = 0$ $a = - \frac{V(1+t)^N}{\rho}$ $V = - a \rho (1+t)^{-N}$ $\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$ $N \quad \text{autrement}$
--

Dans tous les cas usuels, t est supérieur à -1 et donc ρ est un nombre positif. Par conséquent, a et V seront nécessairement de signes algébriques **opposés**.

Pour un *échéancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a (1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$ (attention donc : dans ce cas particulier l'expression du *Solde après flux n* reste valable jusqu'au rang N), et pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = V \frac{(1+t)^n - (1+t)^N}{1 - (1+t)^N} = \frac{a((1+t)^{n-N} - 1)}{t}$$

$$\text{Intérêts constatés en période } n = t V \frac{(1+t)^{n-1} - (1+t)^N}{1 - (1+t)^N} = a ((1+t)^{n-1-N} - 1)$$

Mais attention : dans ce cas, le *flux n* est l'*échéance* de rang $n - 1$ dans le *palier*.

Somme des intérêts

Elle vaut (avec les conventions de signe habituelles) :

$$- (V + N a)$$

$$= (\text{en éliminant } a :) V \left(\frac{N t}{1 - (1+t)^{-N}} - 1 \right)$$

$$= (\text{en éliminant } V :) a \left(\frac{1 - (1+t)^{-N}}{t} - N \right)$$

Sous-cas particulier : V_I (valeur initiale) nulle

Exemple : épargne à mensualités programmées constantes.

Comme plus haut, la "valeur finale" V_F peut alors être notée plus simplement V .

Relation entre paramètres

Elle devient :

$$a \rho + V = 0$$

$$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$$

$$N \quad \text{autrement}$$

d'où :

$N = \frac{\log(1 - t V / a)}{\log(1 + t)} \quad \text{si } t > 0$
$- \frac{V}{a} \quad \text{si } t = 0$
$a = - \frac{V}{\rho}$
$V = - a \rho$
$\text{où } \rho = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \quad \text{si } t \neq 0$
$N \quad \text{autrement}$

Ici encore, dans tous les cas usuels, t est supérieur à -1 et donc ρ est un nombre positif. Par conséquent, a et V seront nécessairement de signes algébriques **opposés**.

Pour un *échancier* "terme à échoir", les formules sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes, a par $a(1+t)$.

Solde après flux n

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N-1\}$ (attention donc : la formule n'est pas vraie pour *Solde après flux N !*), et pour un *échancier* "terme échu" :

$$\text{Solde après flux } n = V \frac{(1+t)^n - 1}{1 - (1+t)^N} = \frac{a((1+t)^n - 1)}{t}$$

$$\text{Intérêts constatés en période } n = t V \frac{(1+t)^{n-1} - 1}{1 - (1+t)^N} = a ((1+t)^{n-1} - 1)$$

Somme des intérêts

Elle vaut (avec les conventions de signe habituelles) :

$$\begin{aligned} & - (V + N a) \\ & = (\text{en éliminant } V :) a \left(\frac{(1+t)^N - 1}{t} - N \right) \\ & = (\text{en éliminant } a :) V \left(\frac{N t}{(1+t)^N - 1} - 1 \right) \end{aligned}$$

Cas particulier : "report" en début d'échéancier

Les formules qui s'appliquent peuvent être obtenues en remplaçant, dans les formules du cas particulier "Un *palier* unique", V_I par :

$$V_I (1+t)^{\text{nombre périodes report}}$$

TAUX DE RENDEMENT INTERNE

Définition

On dit " t est le Taux de Rendement Interne (en abrégé "TRI") de la famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ " pour exprimer le fait que t est le plus petit nombre positif tel que $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, t soit un *échancier*.

Autrement dit :

t est le TRI de la famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$

$\Leftrightarrow t$ est la plus petite solution positive de l'équation :

$$\sum_{n=0}^N \frac{f_n}{(1+t)^n} = 0 \quad (1 \text{ bis})$$

Attention donc :

- Par définition, si t est le TRI de la famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, alors $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, t est un *échancier*
- par contre, si $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, t est un *échancier*, alors t n'est pas forcément le TRI de $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ (puisque'il peut y avoir en général une autre valeur t' plus petite telle que (f_n) , t' soit également un *échancier*).

Remarque : Si $f_0 < 0$ et $\sum_{n=0}^N f_n > 0$, alors :

t est le TRI des flux $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$

$\Leftrightarrow$ pour tout taux d'actualisation $t' \leq t$: $\sum_{n=0}^N VA_{t',n}^N(f_n) \geq 0$

Intérêts au TRI

Pour une famille de nombres $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$ ayant un TRI :

1. les notions présentées plus haut ont toujours un sens :
intérêts constatés de la période n au TRI
solde après flux n au TRI
2. et de plus : somme des *intérêts constatés de la période n au TRI* = – somme des (f_n) .

Rapport entre TRI et taux d'intérêt

La question suivante se pose naturellement :

Pour un échéancier $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, t donné, existe-t-il un critère permettant d'affirmer que t est bien le TRI de la famille de flux (f_n) ?

Le résultat qui suit résout partiellement la question, en assurant que la réponse est positive dans les cas les plus courants.

Cas d'égalité

Soit $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, t un *échéancier*. Alors :

Tous les *solde après flux n* sont de même signe $\Rightarrow t$ est le TRI de la famille de flux (f_n)

C'est-à-dire encore :

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$, $\sum_{p=0}^n \frac{f_p}{(1+t)^p} \leq 0 \Rightarrow$

t est le TRI de la famille de flux (f_n)

Pratiquement, le critère "tous les *solde après flux n* sont de même signe" signifie que l'*échéancier* ne passe pas d'une position "débitrice" à une position "créditrice", ce qui est le cas dans la plupart des cas courants.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que, dans ces hypothèses, l'équation (1 bis) a au plus une solution en t , c'est-à-dire encore que l'équation en x :

$$\sum_{n=0}^N f_n x^n = 0$$

... a au plus une solution en x .

Pour cela il suffit de prouver que si x_0 est une solution de cette équation, alors la fonction :

$$x \rightarrow \sum_{p=0}^n f_p x^p$$

... est une fonction croissante sur $[x_0, +\infty[$

Cela découle de la proposition ci-après :

Proposition $P(n)$:

Pour toute famille de nombres $(f_p)_{p=\{0,1 \dots n\}}$, pour tout nombre $x_0 > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^0 f_p x_0^p < 0 \\ \sum_{p=0}^1 f_p x_0^p < 0 \\ \vdots \\ \sum_{p=0}^{n-1} f_p x_0^p < 0 \\ \sum_{p=0}^n f_p x_0^p = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^n f_p x^p \text{ est une fonction de } x \text{ croissante sur l'intervalle } [x_0, +\infty[$$

Démonstration par récurrence sur n :

- La proposition $P(1)$ est évidente
- Supposons que la proposition $P(n-1)$ soit vraie.

$$\text{Considérons le nouveau polynôme } p'(x) = (f_n \cdot x_0 + f_{n-1}) x^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} f_p x^p$$

$p'(x)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Alors, en notant f'_p les coefficients de p' :

$$\begin{array}{l} \sum_{p=0}^0 f'_p x_0^p = \sum_{p=0}^0 f_p x_0^p < 0 \\ \vdots \\ \sum_{p=0}^{n-2} f'_p x_0^p = \sum_{p=0}^{n-2} f_p x_0^p < 0 \\ p'(x_0) = 0 \end{array}$$

Donc, puisque $P(n-1)$ est vraie, $p'(x)$ est croissante sur $[x_0, +\infty[$

Donc $f_n x_0 x^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-1} f_p x^p$ est elle-même croissante sur $[x_0, +\infty[$

Or $f_n > 0$, donc $f_n (x - x_0) x^{n-1}$ est elle-même croissante sur $[x_0, +\infty[$

Donc $f_n x^n + \sum_{p=0}^{n-1} f_p x^p$ est elle-même croissante sur $[x_0, +\infty[$

ÉQUIVALENCES DE TAUX D'INTERET ENTRE DUREES

Dans cette partie, on se place dans "l'interprétation temporelle" évoquée au chapitre "DEFINITIONS"

Définitions

Dans ce chapitre, on désigne par t le taux d'intérêt qui s'applique (dans un *échancier*) à une période de durée d .

Taux "actuariel"

Définition : t'_1 est le taux "équivalent" ou "actuariel" ("effective" en langue anglaise) correspondant à t sur la durée d' $\Leftrightarrow$

$$(1 + t'_a)^{1/d'} = (1 + t)^{1/d}$$

Exemple : si t est le taux d'intérêt d'une période d'une durée de douze mois, le "taux actuariel" correspondant à t sur une durée d'un mois vérifie :

$$1 + t'_a = (1 + t)^{1/12}$$

Taux "proportionnel"

Définition : t'_p est le taux "nominal" ou "proportionnel" correspondant à t sur la durée d' $\Leftrightarrow$

$$\frac{t'_p}{d'} = \frac{t}{d}$$

Lien entre taux actuariel et taux proportionnel

Si t'_a et t'_p sont respectivement le "taux actuariel" et le "taux proportionnel" correspondant, sur la même durée d' , au taux d'intérêt t :

$$(1 + t'_a)^{d/d'} = 1 + \frac{d}{d'} \cdot t'_p$$

Donc en particulier :

$$t'_p > t'_a \Leftrightarrow d' < d$$

Donc, le fait d'**annoncer** la valeur de t'_a tout en utilisant dans le calcul la valeur de t'_p :

- pour $d' > d$, **surestime** les intérêts
- pour $d' < d$, **sous-estime** les intérêts

Lien entre "taux actuariel" et échancier

Les résultats qui suivent justifient l'utilisation du "taux actuariel" dans le cas où il y a **constatation d'intérêts en fin de la période de durée inférieure**.

Soit $(f_n, f'_n, t_n)_{n=\{1 \dots N\}}$, une famille d'*échancier* (chacun donc à 2 *flux* seulement) telle que, pour tout n appartenant à $\{1 \dots N-1\}$, $f'_n + f_{n+1} = 0$

Alors :

$$(f_1, f'_N), t' \text{ est un échancier} \Leftrightarrow 1 + t' = \prod_{n=1}^N (1 + t_n)$$

Autrement dit, le 2^{ème} *échancier* est considéré comme une succession d'*échanciers* élémentaires tels que le 2^{ème} *flux* de chaque *échancier* élémentaire soit compensé par le 1^{er} *flux* de l'*échancier* élémentaire suivant.

En particulier, si $(f_n, f'_n, t)_{n=\{1 \dots N\}}$ est une famille d'*échancier* (tous donc à 2 *flux* seulement et de même *taux d'intérêt*) telle que pour tout n appartenant à $\{1 \dots N-1\}$, $f'_n + f_{n+1} = 0$, alors :

$$(f_1, f_N), t' \text{ est un échancier} \Leftrightarrow 1 + t' = (1 + t)^N$$

A noter toutefois que dans les cas pratiques, le *flux* en fin de la période de durée inférieure sera en général différent de 0.

VALEUR ACTUALISÉE D'UN ECHEANCIER

Dans cette partie, on considère un *échancier* de type "un palier unique, d'échéance constante et de valeur finale nulle", avec les mêmes notations que plus haut (valeur initiale V , *échéance* a et *taux d'intérêt* t) et un taux d'actualisation r .

Attention : r est ici a priori différent de t ; la perspective est donc différente que celle du chapitre "Rapport entre valeurs actualisées et solde après flux n ", dans lequel on actualisait les flux d'un *échancier* en prenant pour "taux d'actualisation" les *taux d'intérêt* eux-mêmes de l'*échancier*.

Calcul de la valeur actualisée

Soit VA la "valeur actualisée au rang 0" de l'*échancier*, c'est-à-dire :

$$VA = \sum_{n=0}^N VA_{r,n}^0(f_n)$$

Alors :

$$VA = V \left[1 - \frac{t}{r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^N}}{1 - \frac{1}{(1+t)^N}} \right]$$

Formule approchée

Si t et r sont tous deux très petits devant 1 (ce qui est le cas en général) :

$$VA = V \frac{r - t}{r + \frac{1}{N}}$$

Signe de la valeur actualisée

Pour tout N , la fonction qui à t associe $\frac{t}{1 - \frac{1}{(1+t)^N}}$ est croissante dans le domaine de variation

usuel de t .

Donc, pour tout N : $VA > 0 \Leftrightarrow t > r$

Autrement dit, un établissement financier qui "fait des bénéfices actualisés" a bien une "préférence pour le présent" (du moins celle avec laquelle il valorise les échanges financiers avec ses clients) **moins grande** que celle qui est traduite par le taux client.

Comparaison des valeurs actualisées de 2 échéanciers de durées différentes

$$VA' - VA = -V \frac{t}{r} \left[\frac{1 - (1+r)^{-N'}}{1 - (1+t)^{-N'}} - \frac{1 - (1+r)^{-N}}{1 - (1+t)^{-N}} \right]$$

Or si $r < t$ (c'est-à-dire si la "préférence pour le présent" du créancier est "inférieure" à celle que traduisent le taux d'intérêt client), la fonction :

$$N \rightarrow \frac{1 - (1+r)^{-N}}{1 - (1+t)^{-N}}$$

... est croissante en N , et par conséquent : $N' > N \Rightarrow VA' > VA$

Autrement dit, si la "préférence pour le présent" du créancier est moindre que celle que traduit le taux d'intérêt client, alors le "bénéfice actualisé" augmente avec la durée du prêt.

Exemple :

pour un euro prêté,

$$t = 0,019$$

$$r = 0,017$$

N	VA (%)
36	3,3
48	4,2

ECHEANCIER À INTÉRÊTS NON CAPITALISES

Dans ce chapitre, on s'écarte du cadre général retenu jusqu'ici.

Définition

On définit un échéancier "à intérêts non capitalisés" $(f_n)_{n=\{0,1 \dots N\}}$, $(t_n)_{n=\{1, 2 \dots N\}}$ par l'algorithme donné dans le chapitre "part de capital et part d'intérêts des soldes", les seules différences étant que :

- I_0 (intérêts initiaux) peut maintenant être différent de 0
- L'assiette de calcul des intérêts est la "part de capital du solde" et non le "solde".

L'échéancier est donc défini comme suit (avec les mêmes notations que dans le chapitre "part de capital et part d'intérêts des soldes") :

$$K_0 = f_0, I_0 = 0$$

Pour tout n appartenant à $\{1, 2 \dots N\}$:

$$I_n = I_{n-1} + t_n K_{n-1}$$

- si f_n est de signe opposé à I_n :
 - si $|f_n| > |I_n|$: $i_n = -I_n$
 - autrement : $i_n = f_n$
- autrement (donc si f_n est de même signe que I_n) : $i_n = 0$

$$k_n = f_n - i_n$$

$$I_n = I_n + i_n$$

$$K_n = K_{n-1} + k_n$$

Principes de calcul

Dans les cas courants, on peut calculer un *échancier* "à intérêts non capitalisés" en le décomposant en deux phases :

Phase 1

$I_n \text{ reste} > 0$; autrement dit, les échéances n'ont pas encore épuisé les intérêts. L'algorithme s'écrit alors :

$$I_n = I_0 + K_0 \sum_{p=1}^n t_p + \sum_{p=1}^n f_p$$

$$K_n = K_0$$

Le rang de la dernière période de la "phase 1" est donc :

$$\max \{ n \text{ tel que : } I_0 + K_0 \sum_{p=1}^n t_p + \sum_{p=1}^n f_p > 0 \}$$

En particulier, si t et f sont constants :

Le rang de la dernière période de la "phase 1" vaut :

$$n = \text{partie entière de } \frac{I_0}{t K_0 + f}$$

... et de plus :

$$I_n = 0$$

$$K_n = K_0 + I_0 + n (t K_0 + f)$$

Phase 2

Echancier avec $I'_0 = 0$, qui entre donc dans le cadre général.

SOMMAIRE

OBJECTIF	3
DEFINITIONS	3
Définition 1	3
Vocabulaire	4
Définition alternative	4
Vocabulaire	4
Interprétation temporelle.....	4
Cas dégradés	5
RESULTATS GENERAUX	6
Solde après flux n	6
Intérêts constatés	6
Part de "capital" et part "d'intérêts" des soldes.	8
Opérations sur les "échéanciers"	9
Actualisation	10
ECHEANCIERS A PALIERS.....	12
Palier	12
Cas d'un échéancier "à paliers en terme échu".....	12
Cas d'un échéancier "à paliers en terme à échoir".....	13
Cas particulier : paliers à échéance constante.....	14
Cas particulier : paliers de même échéance initiale	15
Cas particulier : un palier unique	15
Cas particulier : "report" en début d'échéancier.....	23
TAUX DE RENDEMENT INTERNE.....	23
Définition	23
Intérêts au TRI.....	24
Rapport entre TRI et taux d'intérêt.....	24
ÉQUIVALENCES DE TAUX D'INTERET ENTRE DUREES.....	25
Définitions.....	26
Lien entre "taux actuariel" et échéancier	26
VALEUR ACTUALISÉE D'UN ECHEANCIER.....	27
Calcul de la valeur actualisée.....	27
Formule approchée	27
Signe de la valeur actualisée	27
Comparaison des valeurs actualisées de 2 échéanciers de durées différentes	28
ECHEANCIER À INTÉRÊTS NON CAPITALISES.....	28
Définition	28
Principes de calcul.....	29